第 3 回：点推定
【教科書第 4 章第 1 節～第 3 節】

北村　友宏

2025 年 10 月 14 日

本日の内容

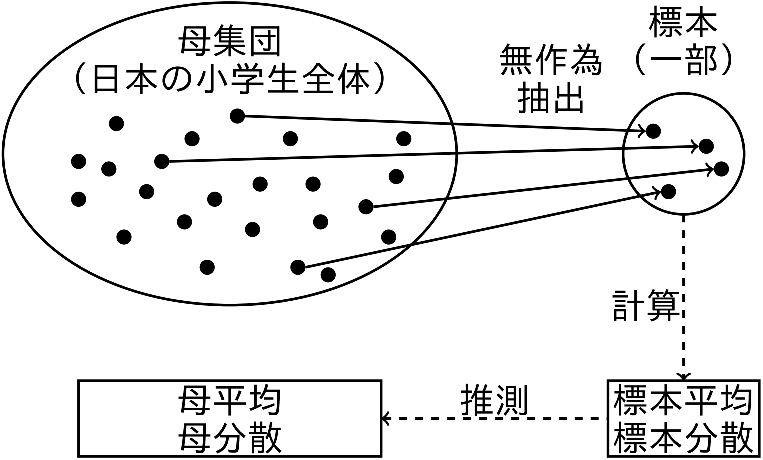
1. 母集団と標本

2. 点推定

統計的推測

- 調査対象の集団全体を母集団（population）という.
  - e.g., 日本の小学生全員
  - 観測することが不可能あるいは困難な場合が多い.
- 母集団の中から個体を抽出して集めたものを標本（sample）という.
  - e.g., 日本の小学生全員の中から抽出した 100 人
- 標本から母集団の特徴を推測することを統計的推測（statistical inference）という.
  - e.g., 日本の小学生全員の中から抽出した 100 人の横断面データを用い,「日本の小学生の算数のテストの平均」を推測する.
  - 推測統計ともいう.

統計的推測のイメージ



母集団分布と母数

- 母集団に含まれる数値の分布を母集団分布（population distribution）という．
- 母集団に含まれる数値の平均を母平均（population mean）という．
  - μ で表すことが多い．
- 母集団に含まれる数値の分散を母分散（population variance）という．
  - σ^2 で表すことが多い．
- 母集団分布の特徴を表す数値を母数（parameter）という．
  - e.g., 母平均，母分散

※ 母数は定数である．

※ 母集団を観測できなければ，母数は未知である．

無作為抽出

- 標本に含まれる個体の数を標本サイズ（sample size）という．
  - 標本の大きさ，サンプルサイズともいう．
  - 「大きさ n の標本」「サンプルサイズ n の標本」などと表現する．
- 母集団からランダムに標本を抽出することを無作為抽出（random sampling）という．
- 無作為抽出された標本を無作為標本（random sample）という．

- 母集団から標本サイズ n の標本を無作為抽出すれば，ランダムに個体の観測値が（1 変数につき）n 個出てくる．それらの選ばれた観測値同士は，互いに独立で同一の分布に従う（independent and identically distributed, i.i.d.）．そして，その分布は母集団分布と同じである．
  - e.g., 母平均 μ, 母分散 σ^2 の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出したものを $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ として，それぞれの X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は互いに独立に期待値 μ, 分散 σ^2 の，母集団分布と同じ確率分布に従う．つまり，

$$E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2.$$

  - どの個体が選ばれるかによって観測値が異なるので，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は確率変数である．

$\Rightarrow$ 無作為標本ならば，観測値同士は互いに独立である．

標本平均

- $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の標本平均（sample mean）は，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

  - $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が確率変数なので，$\bar{X}$ も確率変数である．
  - e.g., 日本人全員の中から最初に 100 人を無作為に選んで計算した平均身長（身長の標本平均）と，別の 100 人を無作為に選んで計算した平均身長（身長の標本平均）は異なるので，誰が選ばれるかによって標本平均がランダムに変化する．

母平均 μ の母集団から抽出した標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ について，$E(\bar{X}) = \mu$ である．

（証明）

$$
\begin{aligned}
E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\cdot(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\cdot E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n}\cdot \{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} \\
&= \frac{1}{n}\cdot(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu.
\end{aligned}
$$
（証明終）

母分散 σ^2 の母集団から抽出した無作為標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ について，$V(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ である．

（証明）

$$\begin{aligned}
V(\bar{X}) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= V\left(\frac{1}{n}\cdot(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n).
\end{aligned}$$

無作為標本なら $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は互いに独立なので，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は互いに無相関である．
よって，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2} \cdot V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\} \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot (\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}
$$

（証明終）

算術平均と標本平均と母平均の違い

- 算術平均：
  - 「合計 ÷ 個数」の方法で計算された平均
- 標本平均：
  - 母集団から抽出した標本の観測値のみを用いて計算された平均
  - 通常は「算術平均」の方法で計算
  - e.g., 日本の小学生全員の中から無作為抽出された 100 人の，算数のテストの点数の算術平均
- 母平均：
  - 母集団に含まれる数値の平均
  - 通常は「算術平均」の方法で計算
  - e.g., 日本の小学生全員の，算数のテストの点数の算術平均
  - 母集団のデータを全て入手できなければ計算不可能

標本分散

母平均 μ, 母分散 σ^2 の母集団から抽出した無作為標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の標本分散（sample variance）を，

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

と定義すれば，$E(S^2) = \sigma^2$ となる．

- $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が確率変数なので，S^2 も確率変数である．
- 標本分散を $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ と定義すると，$E(S^2) = \sigma^2$ とならない．

（証明）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \mu) + (\mu - \bar{X})\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) \\
&\qquad + (\bar{X} - \mu)^2\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}\{-2(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu)\} + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) &= n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = n \cdot \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu\right) \\
&= n \cdot \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \cdot n\mu\right) \\
&= n(\bar{X} - \mu),
\end{aligned}$$

なので,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+n(\bar{X}-\mu)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\cdot n(\bar{X}-\mu)+n(\bar{X}-\mu)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2n(\bar{X}-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2.
\end{aligned}
$$

また，$E(X_i) = \mu, E(\bar{X}) = \mu$ なので，

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i - E(X_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2, \\
E\left(n(\bar{X} - \mu)^2\right) &= nE(\bar{X} - \mu)^2 \\
&= nE(\bar{X} - E(\bar{X}))^2 \\
&= nV(\bar{X}) \\
&= n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2,
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
&E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right)\\
=&E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)-E\left(n(\bar{X}-\mu)^2\right)\\
=&n\sigma^2-\sigma^2=(n-1)\sigma^2.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=(n-1)\sigma^2,
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\cdot E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\cdot (n-1)\sigma^2 \\
&= \sigma^2,
\end{aligned}
$$

である．（証明終）

統計量

- 標本の関数を統計量（statistics）という．
  - e.g., 標本平均，標本分散

※ 標本の各個体の観測値が確率変数のため，統計量も確率変数である．

統計量と母数の大きな違い

- 統計量：
  - どの個体が選ばれるかによって値が（ランダムに）変化する.
    $\Longrightarrow$ 確率変数

$$\Updownarrow$$

- 母数：
  - 全体に対して平均や分散を計算したものなので選び方による違いは発生しない.
    $\Longrightarrow$ 定数

点推定

- 標本から母数を定めることを母数の推定（estimation）という．
- 母数をピンポイントで定めることを点推定（point estimation）という．
- 推定に用いる統計量を推定量（estimator）という．
  - 確率変数である．
- 推定量の実現値を推定値（estimate）という．
  - 推定量の標本の部分に具体的な実現値を代入して求めたものなので，定数である．

小標本と大標本

- 観測値数が少ない標本を小標本（small sample）という.
  - 「標本サイズ – 推定する母数の数 $<$ 30」となる場合が一般的.
- 観測値数が多い標本を大標本（large sample）という.
  - 「標本サイズ – 推定する母数の数 $\geq$ 30」となる場合が一般的.

不偏性

- 期待値が母数に等しい推定量を不偏推定量（unbiased estimator）という．
- 期待値が母数に等しいという性質を不偏性（unbiasedness）という．
- 母数 θ の推定量を $\hat{\theta}$ とすると，

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

ならば $\hat{\theta}$ は θ の不偏性を満たす不偏推定量である．

有効性

- 不偏推定量の中で分散が最小の推定量を有効推定量（efficient estimator）という．
  - 効率推定量，最小分散不偏推定量ということもある．
- 不偏推定量の中で分散が最小であるという性質を有効性（efficiency）という．
  - 効率性，最小分散不偏性ということもある．
- 母数 θ の不偏推定量を $\hat{\theta}$ とする．$\hat{\theta}$ の分散が他のどんな不偏推定量 $\hat{\theta}^*$ の分散と同じかそれらより小さい，つまり，

  $$V(\hat{\theta}) \leq V(\hat{\theta}^*),$$

  ならば $\hat{\theta}$ は θ の有効性を満たす有効推定量である．

小標本での標本平均と標本分散の性質

- 小標本においては，用いる推定量が不偏性を満たしていることが望ましい．
- すでに見たように，標本平均を $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とすると，$E(\bar{X}) = \mu$ となり，期待値が母平均に等しいので，$\bar{X}$ は μ の不偏推定量である．
- $\bar{X}$ は μ の有効推定量でもある（証明は省略）．
- すでに見たように，標本分散を $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ とすると，$E(S^2) = \sigma^2$ となり，期待値が母分散に等しいので，S^2 は σ^2 の不偏推定量である．

確率収束

- 確率変数列を $\{X_n\}$ とする.
- 任意の $\varepsilon > 0$ について,

$$\lim_{n \to \infty} \Pr(|X_n - c| > \varepsilon) = 0,$$

ならば，X_n は c に確率収束（convergence in probability）するという.

  - $X_n \xrightarrow{p} c$, $\operatorname*{plim}_{n \to \infty} X_n = c$ と表す.

一致性

- 標本サイズが大きいときに母数に確率収束する推定量を一致推定量（consistent estimator）という.
- 標本サイズが大きいときに母数に確率収束するという性質を一致性（consistency）という.
- 以下，標本サイズ n の統計量には，右下に n の添え字を付けて表記する.
- 母数 θ の推定量を $\hat{\theta}_n$ とすると，

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta,$$

ならば $\hat{\theta}_n$ は θ の一致性を満たす一致推定量である.

分布収束

- 確率変数列を $\{X_n\}$ とし，それに対応する累積分布関数の列を $F_n(.)$ とする．
- 任意の x について，
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$
ならば，X_n は $F(.)$ に分布収束（convergence in distribution）するという．
  - $X_n \xrightarrow{d} F(.)$ と表す．
- 標本サイズが大きいときの近似分布を漸近分布（asymptotic distribution）という．
  - $X_n \overset{a}{\sim} F(.)$ と表す．

漸近正規性

- 漸近分布が正規分布である推定量を漸近正規推定量（asymptotic normal estimator）という．
- 漸近分布が正規分布であるという性質を漸近正規性（asymptotic normality）という．
- 母数 θ の推定量を $\hat{\theta}_n$ とする．

$$\hat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N(.,.),$$

ならば $\hat{\theta}_n$ は θ の漸近正規性を満たす漸近正規推定量である．

大標本での標本平均の性質

- 大標本においては，用いる推定量が一致性を満たしていることが望ましい．
- 母平均 μ, 母分散 $\sigma^2 < \infty$ の母集団から無作為抽出した大きさ n の標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の標本平均 $\bar{X}_n$ は，標本サイズ n が大きくなると，大数の法則（law of large number）より，

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu.$$

（証明は省略）
$\Rightarrow$ 無作為標本の標本平均 $\bar{X}_n$ は母平均 μ の一致推定量である．
$\Rightarrow$ 無作為標本の標本平均は，標本サイズを増やすことで，母平均に限りなく近づく．

- 母平均 μ, 母分散 $\sigma^2 < \infty$ の母集団から無作為抽出した大きさ n の標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の標本平均 $\bar{X}_n$ を標準化したものは，標本サイズ n が大きくなると，中心極限定理（central limit theorem）より，

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

（証明は省略）
$\Rightarrow$ 無作為標本の標本平均を標準化したものは，標本サイズが十分に大きければ，標準正規分布に従う．

- 大きさ n の無作為標本の標本平均を標準化したものは，標本サイズ n が十分に大きければ，近似的に標準正規分布に従う．つまり，

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \overset{a}{\sim} N(0, 1).$$

- 母平均 μ, 母分散 $\sigma^2 < \infty$ の母集団からの無作為標本の標本平均 $\bar{X}_n$ の漸近分布は，

$$\bar{X}_n \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

（証明は省略）
$\Rightarrow$ 母集団分布がどのような分布であっても，無作為標本の標本平均は，標本サイズが十分に大きいとき，近似的に正規分布に従う．

大標本での標本分散の性質

- 母平均 μ, 母分散 $\sigma^2 < \infty$ の母集団から無作為抽出した大きさ n の標本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の標本分散を,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

と定義した場合も,

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

と定義した場合も，S_n^2 は母分散 σ^2 の一致推定量である（証明は省略）.
$\Rightarrow$ どちらの定義の場合も，標本サイズを増やすことで，S_n^2 は母分散 σ^2 に限りなく近づく.

今日のキーワード

母集団，標本，統計的推測，母集団分布，母平均，母分散，母数，標本サイズ，無作為抽出，無作為標本，標本平均，標本分散，統計量，推定，点推定，推定量，推定値，小標本，大標本，不偏推定量，不偏性，有効推定量，有効性，確率収束，一致推定量，一致性，分布収束，漸近分布，漸近正規推定量，漸近正規性

次回までの準備

- 今回の講義スライドを読み直す.
- 教科書第 4 章第 4 節を読む.